

測定誤差のある場合のx管理図の特性

その他（別言語等） のタイトル	The Operating Characteristics of x Chart when Measurement Errors Exist
著者	金塚 高次
雑誌名	室蘭工業大学研究報告
巻	4
号	2
ページ	527-544
発行年	1963-06-30
URL	http://hdl.handle.net/10258/3196

測定誤差のある場合の \bar{x} 管理図の特性

金 塚 高 次

The Operating Characteristics of \bar{x} Chart when Measurement Errors Exist

Takazi Kanazuka

Abstract

When measurement errors exist, the control limits of \bar{x} chart are $\mu \pm 3\sqrt{(\sigma_P^2 + \sigma_M^2)/n}$. In this case, σ_P^2 is the variance of process and σ_M^2 is that of measurement errors involving sampling errors, and n is sample size. If the change of the process average is δ times as great as the process standard deviation σ_P and the changed process standard deviation is κ times as great as σ_P , the power of detecting the change of the process is

$$P = \Phi \left\{ -3 \sqrt{\frac{1 + (\sigma_M / \sigma_P)^2}{k^2 + (\sigma_M / \sigma_P)^2}} - \delta \sqrt{n} \sqrt{\frac{1}{k^2 + (\sigma_M / \sigma_P)^2}} \right\} \\ + \Phi \left\{ -3 \sqrt{\frac{1 + (\sigma_M / \sigma_P)^2}{k^2 + (\sigma_M / \sigma_P)^2}} + \delta \sqrt{n} \sqrt{\frac{1}{k^2 + (\sigma_M / \sigma_P)^2}} \right\}$$

The influence of measurement errors on \bar{x} chart is explained in detail in this paper.

1. 緒 言

管理図を工程の解析と管理のために使用する上に、いろいろの特性が論じられているが、一番問題とされているものは「母集団が同一であるにもかかわらず点が管理限界線の外に出る確率（第1種の過誤）」およびその逆、すなわち「母集団が異なるにもかかわらず点が管理限界線内にある確率（第2種の過誤）」である。後者の第2種の過誤は、母集団の異常の程度により異なるので、一般に表現するためには横軸に異常の程度をとった動作特性曲線（OC曲線）が用いられており、又この異常を発見する確率が検出力と呼ばれ、この問題に関しては伊藤¹⁾、Cowden²⁾の詳細な研究をはじめとして多くの研究がある。だがこれらの場合はいずれも母分散が単一の σ^2 であるとして測定誤差等の伴わない場合につき検討している。

しかし、実際にある工程を管理図を使って管理しようとする場合、問題としている特性値については無限母集団と考えられる工程のバラッキの他に、必ず測定誤差、サンプリング誤差、縮分誤差を伴うもので、この測定誤差、サンプリング誤差等の大きさにより管理図の検出力

にいかに影響するかを明らかにすることは、管理図を使う上で重要なことである。これは現在未解決である管理図を調節用に用いる場合の調節限界の合理的な決定法にも関連することである。従来この問題に関する十分な検討はなされていない。わずかに工程平均のみが変化したときにつき水野³⁾の研究がある。

一方計量抜取検査における測定誤差の影響に関しては上甲⁴⁾の研究があり、測定単位の影響については熊谷⁵⁾の研究がある。管理図については吉本⁶⁾により測定単位の影響が検討されている。

著者は測定誤差（サンプリグ誤差を含む）の存在する場合の管理図の特性をいろいろの場合について検討しているが、本報ではまず管理図の基本である \bar{x} 管理図の場合について報告する。

2. 工程平均のみが変化したときの特性

いま工程の変動を母分散として σ_P^2 、測定誤差（サンプリグ誤差を含む）の分散を σ_M^2 とし、管理図としては、 $N(\mu, \sigma_P^2 + \sigma_M^2)$ という正規母集団に対して、試料の大きさが n で、 $\mu \pm 3\sqrt{\sigma_P^2 + \sigma_M^2}/\sqrt{n}$ のところに管理限界線を設けた \bar{x} 管理図について考察する。

工程平均のみが変化して μ' になった正規母集団 $N(\mu', \sigma_P^2 + \sigma_M^2)$ から大きさ n の試料をランダムにとって測定値の平均 \bar{x} を計算し、この管理図に打点するものとする。すなわち図—1において

$$D = 3 \sqrt{\sigma_P^2 + \sigma_M^2} / \sqrt{n} \quad (1)$$

$$\sigma' = \sqrt{\sigma_P^2 + \sigma_M^2} / \sqrt{n} \quad (2)$$

で、いま工程に

$$\delta' = \mu' - \mu = \delta \sigma_P \quad (3)$$

なる変化があったとすると、点が管理限界外に落ちる確率は図の影線部分の面積で与えられる。

ここで $N(\mu, \sigma^2)$ という正規母集団からの試料平均 \bar{x} がある値 x_0 より小となる確率を

$$Pr\{\bar{x} \leq x_0 \mid \mu, \sigma^2\} \quad (4)$$

で表わすことにすると、 \bar{x} が LCL より小となる確率は

$$Pr_1 = Pr\left\{\bar{x} \leq \mu - 3 \frac{\sqrt{\sigma_P^2 + \sigma_M^2}}{\sqrt{n}} \mid \mu', \sqrt{\sigma_P^2 + \sigma_M^2}\right\} \quad (5)$$

また \bar{x} が UCL より大となる確率は

$$Pr_2 = Pr\left\{\bar{x} \geq \mu + 3 \frac{\sqrt{\sigma_P^2 + \sigma_M^2}}{\sqrt{n}} \mid \mu', \sqrt{\sigma_P^2 + \sigma_M^2}\right\} \quad (6)$$

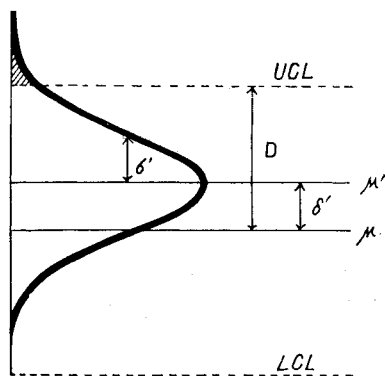


図-1 工程平均の変化

で与えられる。

$$u = \frac{\bar{x} - \mu'}{\sqrt{\sigma_P^2 + \sigma_M^2} / \sqrt{n}} \quad (7)$$

なる変数変換を行ない規準化すると、工程の変化に対する検出力 $P = P_{r1} + P_{r2}$ は

$$\begin{aligned} P &= P_r \left\{ u \leq -3 + \frac{\mu - \mu'}{\sqrt{\sigma_P^2 + \sigma_M^2} / \sqrt{n}} \right\} + P_r \left\{ u \geq 3 + \frac{\mu - \mu'}{\sqrt{\sigma_P^2 + \sigma_M^2} / \sqrt{n}} \right\} \\ &= P_r \left\{ u \leq -3 - \delta \sqrt{n} \sqrt{\frac{\sigma_P^2}{\sigma_P^2 + \sigma_M^2}} \right\} + P_r \left\{ u \geq 3 - \delta \sqrt{n} \sqrt{\frac{\sigma_P^2}{\sigma_P^2 + \sigma_M^2}} \right\} \end{aligned} \quad (8)$$

となる。ここで

$$\sqrt{\frac{\sigma_P^2}{\sigma_P^2 + \sigma_M^2}} = \sqrt{m} \quad (9)$$

$$\sqrt{n} \times \sqrt{m} = \sqrt{n'} \quad (10)$$

とすれば

$$\begin{aligned} P &= \int_{-\infty}^{-3 - \delta \sqrt{n'}} \phi(u) du + \int_{3 - \delta \sqrt{n'}}^{\infty} \phi(u) du \\ &= \Phi(-3 - \delta \sqrt{n'}) + \Phi(-3 + \delta \sqrt{n'}) \end{aligned} \quad (11)$$

となる。ただし

$$\phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \quad \Phi(u) = \int_{-\infty}^u \phi(u) du \quad (12)$$

である。 $1/\sqrt{m} = \sqrt{1 + \frac{\sigma_M^2}{\sigma_P^2}}$ であるから、 σ_M^2/σ_P^2 と n を指定すると、 $\sqrt{n'}$ が求められ、(11)から任意の δ に対する検出力が求められる。

一例として $n = 5$, $\sigma_M^2/\sigma_P^2 = 0.2$ の場合について計算手順を示すと表-1 のようになる。表-1 において $\delta \geq 0$ についてのみ計算を実施したが $\delta < 0$ の場合には正規分布および \bar{x} 管理図の対称性により検出力も対称になる。

同様な計算で、 $\sigma_M^2/\sigma_P^2 = 0.1, 0.2, 0.3, 0.5, 1.0$ のおのおのについて 3 シグマ限界の $n = 1, 2, 4, 5$ の \bar{x} 管理図と 2 シグマ限界による $n = 1$ の \bar{x} 管理図につき検出力を求め、その結果を表-2 に示す。なお、比較のために $\sigma_M^2/\sigma_P^2 = 0$ (測定誤差の無い場合) についての検出力も併記した。

表-1 \bar{x} 管理図の検出力の計算表

$n = 5$, $\sigma_M^2/\sigma_P^2 = 0.2$, $\sqrt{m} = 0.912871$, $\sqrt{n'} = 2.041242$

δ	$\delta \sqrt{n'}$	$-3 - \delta \sqrt{n'}$	Pr_1	$-3 + \delta \sqrt{n'}$	Pr_2	P
0	0	- 3	0.00135	- 3	0.00135	0.00270
0.5	1.0206	- 4.0206	0.00003	- 1.9794	0.02389	0.02392
1.0	2.0412	- 5.0412	0.00000	- 0.9588	0.16883	0.16883
1.5	3.0619	- 6.0619	0.00000	0.0619	0.52468	0.52468
2.0	4.0825	- 7.0825	0.00000	1.0825	0.86048	0.86048
2.5	5.1031	- 8.1031	0.00000	2.1031	0.98227	0.98227
3.0	6.1237	- 9.1237	0.00000	3.1237	0.99911	0.99911
3.5	7.1443	- 10.1443	0.00000	4.1443	0.99998	0.99998
4.0	8.1650	- 11.1650	0.00000	5.1650	1.00000	1.00000

表—2. 1 $n = 4$, 3 シグマ法

δ	σ_M^2 / σ_P^2	0	0.1	0.2	0.3	0.5	1.0
0		0.0027	0.0027	0.0027	0.0027	0.0027	0.0027
0.5		0.0228	0.0204	0.0185	0.0169	0.0146	0.0110
1.0		0.1587	0.1372	0.1201	0.1064	0.0858	0.0564
1.5		0.5000	0.4445	0.3969	0.3561	0.2910	0.1898
2.0		0.8413	0.7921	0.7426	0.6943	0.6049	0.4319
2.5		0.9772	0.9614	0.9411	0.9170	0.8605	0.7038
3.0		0.9987	0.9967	0.9934	0.9882	0.9712	0.8930
3.5		1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9967	0.9744
4.0		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9961
4.5		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9996
5.0		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

表—2. 2 $n = 5$, 3 シグマ法

δ	σ_M^2 / σ_P^2	0	0.1	0.2	0.3	0.5	1.0
0		0.0027	0.0027	0.0027	0.0027	0.0027	0.0027
0.5		0.0299	0.0266	0.0239	0.0218	0.0185	0.0137
1.0		0.2225	0.1927	0.1688	0.1494	0.1201	0.0780
1.5		0.6384	0.5785	0.5247	0.4768	0.3969	0.2649
2.0		0.9295	0.8969	0.8605	0.8218	0.7426	0.5645
2.5		0.9952	0.9901	0.9823	0.9715	0.9411	0.8297
3.0		0.9999	0.9997	0.9991	0.9980	0.9934	0.9594
3.5		1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9944
4.0		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9996
4.5		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

表—2. 3 $n = 2, 3$ シグマ法

$\frac{\sigma_M^2}{\sigma_P^2} \backslash \delta$	0	0.1	0.2	0.3	0.5	1.0
0	0.0027	0.0027	0.0027	0.0027	0.0027	0.0027
0.5	0.0110	0.0101	0.0094	0.0088	0.0079	0.0064
1.0	0.0564	0.0493	0.0437	0.0392	0.0325	0.0228
1.5	0.1898	0.1642	0.1438	0.1272	0.1024	0.0668
2.0	0.4319	0.3809	0.3380	0.3018	0.2449	0.1587
2.5	0.7038	0.6447	0.5900	0.5402	0.4594	0.3085
3.0	0.8930	0.8520	0.8087	0.7645	0.6787	0.5000
3.5	0.9744	0.9572	0.9355	0.9101	0.8512	0.6915
4.0	0.9961	0.9917	0.9848	0.9751	0.9473	0.8413
4.5	0.9996	0.9989	0.9975	0.9951	0.9860	0.9332
5.0	1.0000	0.9999	0.9997	0.9993	0.9972	0.9772
5.5	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9938
6.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9987
6.5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998
7.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

表—2. 4 $n = 1, 3$ シグマ法

$\frac{\sigma_M^2}{\sigma_P^2} \backslash \delta$	0	0.1	0.2	0.3	0.5	1.0
0	0.0027	0.0027	0.0027	0.0027	0.0027	0.0027
0.5	0.0064	0.0061	0.0058	0.0055	0.0051	0.0045
1.0	0.0228	0.0204	0.0185	0.0169	0.0146	0.0110
1.5	0.0668	0.0582	0.0515	0.0461	0.0379	0.0263
2.0	0.1587	0.1372	0.1201	0.1064	0.0858	0.0564
2.5	0.3085	0.2689	0.2364	0.2097	0.1688	0.1089
3.0	0.5000	0.4445	0.3969	0.3561	0.2910	0.1898
3.5	0.6915	0.6320	0.5773	0.5278	0.4434	0.2998
4.0	0.8413	0.7921	0.7426	0.6943	0.6049	0.4319
4.5	0.9332	0.9016	0.8660	0.8281	0.7499	0.5722
5.0	0.9772	0.9614	0.9411	0.9170	0.8605	0.7038
5.5	0.9938	0.9876	0.9783	0.9659	0.9320	0.8130
6.0	0.9987	0.9967	0.9934	0.9882	0.9712	0.8930
6.5	0.9998	0.9993	0.9983	0.9965	0.9895	0.9448
7.0	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9967	0.9744
7.5	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9991	0.9894
8.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9961
8.5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9987

σ_M^2/σ_P^2 δ	0	0.1	0.2	0.3	0.5	1.0
9.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9996
9.5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
10.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

図—2に $\sigma_M^2/\sigma_P^2=0.3$, $n=1, 2, 4, 5$ の場合の工程の変化 δ と検出力 P との関係, 図—3に $n=5$, $\sigma_M^2/\sigma_P^2=0 \sim 1.0$ の場合の δ と P との関係, 図—4に $n=5$, $\delta=0.5 \sim 3.0$ の場合の σ_M^2/σ_P^2 と P との関係を示す。

計算の結果からつぎの結論が得られる。

- 1) 管理限界の巾を与える係数が一定の場合, 検出力は $\delta \sqrt{n} \sqrt{m}$ の値によって定まる。たとえば, δ が一定ならば, $n=1$, $\sigma_M^2/\sigma_P^2=0$ と $n=2$, $\sigma_M^2/\sigma_P^2=1.0$ また $n=3$, σ_M^2/σ_P^2

表—2. 5 $n=1, 2$ シグマ法

σ_M^2/σ_P^2 δ	0	0.1	0.2	0.3	0.5	1.0
0	0.0455	0.0455	0.0455	0.0455	0.0455	0.0455
0.5	0.0730	0.0705	0.0684	0.0666	0.0637	0.0591
1.0	0.1600	0.1493	0.1403	0.1327	0.1207	0.1014
1.5	0.3088	0.2847	0.2645	0.2473	0.2197	0.1749
2.0	0.5000	0.4630	0.4309	0.4030	0.3570	0.2793
2.5	0.6915	0.6494	0.6111	0.5764	0.5164	0.4083
3.0	0.8413	0.8052	0.7699	0.7360	0.6735	0.5483
3.5	0.9332	0.9094	0.8840	0.8576	0.8045	0.6826
4.0	0.9772	0.9652	0.9507	0.9343	0.8972	0.7963
4.5	0.9938	0.9890	0.9825	0.9742	0.9530	0.8814
5.0	0.9987	0.9972	0.9948	0.9915	0.9814	0.9377
5.5	0.9998	0.9994	0.9987	0.9976	0.9936	0.9706
6.0	1.0000	0.9999	0.9997	0.9994	0.9981	0.9875
6.5	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9953
7.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9984
7.5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9995
8.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
8.5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
9.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
9.5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
10.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

$=2.0$ などはいづれも $\sqrt{n} \sqrt{m} = 1$ で検出力は同じである。また $n=2$, $\sigma_M^2/\sigma_P^2=0$ と $n=4$, $\sigma_M^2/\sigma_P^2=1.0$ は $\sqrt{n} \sqrt{m} = \sqrt{2}$ で検出力は同じである。すなわち工程の変動と

同程度の大きさの測定誤差のある場合の $n=4$ の \bar{x} 管理図の検出力は、測定誤差のない場合の $n=2$ の \bar{x} 管理図の検出力と等しい。一般的に同じ検出力を得る n は、 $m=1$ すなわち $\sigma_M^2/\sigma_P^2=0$ の n の $1/m$ すなわち $(1+\frac{\sigma_M^2}{\sigma_P^2})$ 倍である。

σ_M^2/σ_P^2 が一定ならば、 $n=1, \delta=1$ と $n=4, \delta=1/2$ はいずれも $\delta\sqrt{n}=1$ で検出力

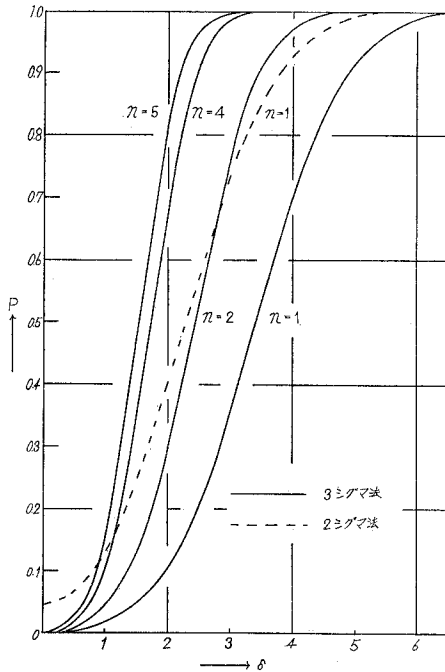


図-2 検出力曲線 (1)
 μ のみ変化した場合 $\sigma_M^2/\sigma_P^2=0.3$

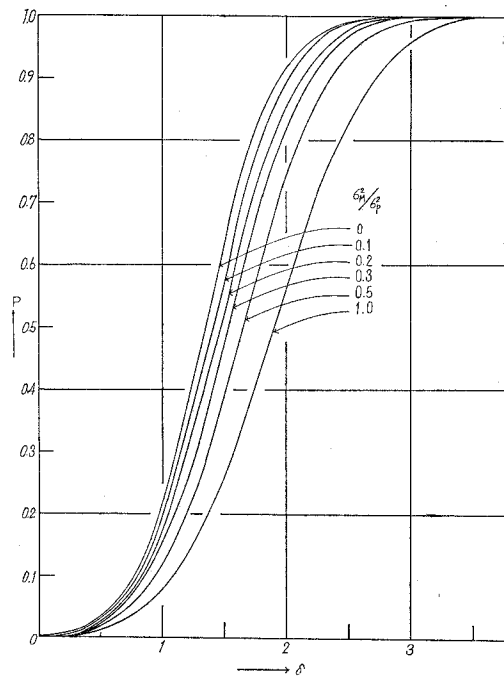


図-3 検出力曲線 (2)
 μ のみ変化した場合 $n=5$

は同じである。一般的に同じ検出力を得る δ は $n=1$ の δ の $1/\sqrt{n}$ である。

また n が一定ならば、同じ検出力を得る δ は $\sqrt{m}=1$ すなわち $\sigma_M^2/\sigma_P^2=0$ の δ の $1/\sqrt{m} = \sqrt{1+\frac{\sigma_M^2}{\sigma_P^2}}$ 倍である。

2) $\delta=0$ のときは σ_M^2/σ_P^2 は検出力に影響せず、第1種の誤りの確率は3シグマ法で0.27%であり、2シグマ法では4.55%である。

3) $\delta\sqrt{n}$ が十分大きくて、 \sqrt{m} の係数を乗じても3シグマ限界の外にあるならば、 σ_M^2/σ_P^2 の影響はない。

4) 3シグマ法では $\sigma_M^2/\sigma_P^2=0.1\sim 1.0$ の範囲では、 $\delta\sqrt{n}=3\sim 5$ のとき測定誤差が検出力を減少させる効果が大である。

5) σ_M^2/σ_P^2 が大となって検出力が減少したとき、 n を大にすれば検出力を回復することが可能である。この程度は $\delta\sqrt{n}\sqrt{m}$ によって定まる。

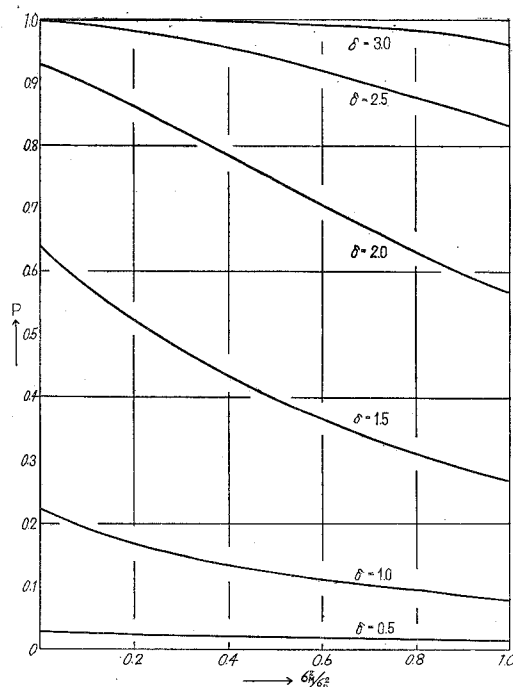


図-4 検出力曲線 (3)
μのみ変化した場合 n=5

3. 工程標準偏差のみが変化したときの特性

σ_P のみが変化した新しい母集団N ($\mu, \sigma_P'^2 + \sigma_M^2$) からの大きさの n 試料平均 \bar{x} を、もとの母集団N ($\mu, \sigma_P^2 + \sigma_M^2$) により設定した管理図に打点した場合、点が管理限界外に落ちる確率は

$$P = \Pr \left\{ \bar{x} \leq \mu - 3 \sqrt{\frac{\sigma_P^2 + \sigma_M^2}{n}} \mid \mu, \sqrt{\sigma_P'^2 + \sigma_M^2} \right\} + \Pr \left\{ \bar{x} \geq \mu + 3 \sqrt{\frac{\sigma_P^2 + \sigma_M^2}{n}} \mid \mu, \sqrt{\sigma_P'^2 + \sigma_M^2} \right\} \quad (13)$$

で与えられる。

$$u = \frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{\sigma_P'^2 + \sigma_M^2} / \sqrt{n}} \quad (14)$$

なる変数変換を行なって規準化すると

$$P = \Pr \{ u \leq -3\sqrt{m'} \} + \Pr \{ u \geq 3\sqrt{m'} \} = 2 \Phi(-3\sqrt{m'}) \quad (15)$$

となる。ただし

$$\sqrt{m'} = \sqrt{\frac{\sigma_P^2 + \sigma_M^2}{\sigma_P'^2 + \sigma_M^2}} \quad (16)$$

である。いま $\sigma_P'/\sigma_P = \kappa$ ，すなわち工程の母標準偏差がもとの κ 倍になったときは

$$\sqrt{m'} = \sqrt{\frac{1 + \sigma_M^2/\sigma_P^2}{\kappa^2 + \sigma_M^2/\sigma_P^2}} \quad (17)$$

となり，検出力は試料の大きさには無関係である。

$\sigma_M^2/\sigma_P^2 = 0.1, 0.3, 0.5, 1.0$ ， $\kappa = 0.5 \sim 6.0$ について検出力を計算し，その結果を表-3に示す。表-3の結果を図示すると，図-5のようになる。

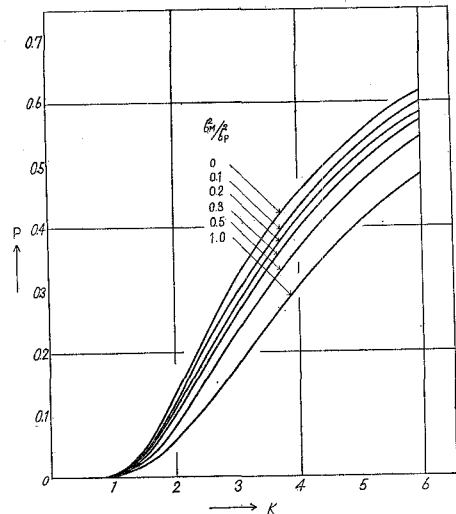


図-5 検出力曲線 (4)
 σ_P のみ変化した場合 (3シグマ法)

表-3 3 シ グ マ 法

σ_M^2/σ_P^2 κ	0	0.1	0.2	0.3	0.5	1.0
0.5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001
1.0	0.0027	0.0027	0.0027	0.0027	0.0027	0.0027
1.5	0.0455	0.0401	0.0358	0.0322	0.0267	0.0186
2.0	0.1336	0.1202	0.1088	0.0990	0.0833	0.0578
2.5	0.2301	0.2118	0.1957	0.1814	0.1573	0.1151
3.0	0.3173	0.2969	0.2786	0.2620	0.2332	0.1797
4.0	0.4533	0.4329	0.4142	0.3969	0.3657	0.3035
5.0	0.5485	0.5300	0.5127	0.4965	0.4669	0.4054
6.0	0.6171	0.6005	0.5849	0.5702	0.5431	0.4855

結論として工程標準偏差 σ_P が変化したときの \bar{x} 管理図の検出力に対する測定誤差の影響はつぎのとおりである。

1) 検出力は管理限界の巾を与える係数と $\sqrt{m'}$ の値により定まり，試料の大きさに無関係である。

2) $\kappa > 1$ では σ_M^2/σ_P^2 が増大すると検出力が減少するが，式 (17) で見るとおり $\sqrt{m'}$ の分子分母に σ_M^2/σ_P^2 が入っているのて， μ のみが変化する場合ほどその影響は大きくない。

3) $\kappa = 1$ では σ_M^2/σ_P^2 は検出力に影響しない。

4) $\kappa < 1$ では $\sqrt{m'} > 1$ であるから， σ_M^2/σ_P^2 の影響はほとんどなく，検出力は次第に 0 に接近するが， σ_M^2/σ_P^2 が大きい場合は小さい場合よりごく僅か検出力が増加する傾向がある。

4. 工程平均と工程標準偏差とが変化したときの特性

工程の変化により新しい母集団を $N(\mu', \sigma_P'^2 + \sigma_M^2)$ とし、これから大きさ n の試料をとりその平均値 \bar{x} を $N(\mu, \sigma_P^2 + \sigma_M^2)$ から設定した管理限界をもつ管理図に打点した場合に、点が管理限界外に落ちる確率は、

$$P = \Pr \left\{ \bar{x} \leq \mu - 3 \frac{\sqrt{\sigma_P^2 + \sigma_M^2}}{\sqrt{n}} \mid \mu', \sqrt{\sigma_P'^2 + \sigma_M^2} \right\} \\ + \Pr \left\{ \bar{x} \geq \mu + 3 \frac{\sqrt{\sigma_P^2 + \sigma_M^2}}{\sqrt{n}} \mid \mu', \sqrt{\sigma_P'^2 + \sigma_M^2} \right\} \quad (18)$$

で与えられる。

$$u = \frac{\bar{x} - \mu'}{\sqrt{\sigma_P'^2 + \sigma_M^2}} \sqrt{n} \quad (19)$$

なる変数変換を行なって規準化すると

$$P = \Pr \left\{ u \leq (\mu - \mu') \sqrt{\frac{n}{\sigma_P'^2 + \sigma_M^2}} - 3 \sqrt{\frac{\sigma_P^2 + \sigma_M^2}{\sigma_P'^2 + \sigma_M^2}} \right\} \\ + \Pr \left\{ u \geq (\mu - \mu') \sqrt{\frac{n}{\sigma_P'^2 + \sigma_M^2}} + 3 \sqrt{\frac{\sigma_P^2 + \sigma_M^2}{\sigma_P'^2 + \sigma_M^2}} \right\} \quad (20)$$

となる。ここで $(\mu' - \mu) / \sigma_P = \delta$, $\sigma_P' / \sigma_P = \kappa$ とおくと、式 (20) は

$$P = \Pr \left\{ u \leq -\delta \sqrt{n} \sqrt{\frac{\sigma_P^2}{\sigma_P'^2 + \sigma_M^2}} - 3 \sqrt{\frac{\sigma_P^2 + \sigma_M^2}{\sigma_P'^2 + \sigma_M^2}} \right\} \\ + \Pr \left\{ u \geq -\delta \sqrt{n} \sqrt{\frac{\sigma_P^2}{\sigma_P'^2 + \sigma_M^2}} + 3 \sqrt{\frac{\sigma_P^2 + \sigma_M^2}{\sigma_P'^2 + \sigma_M^2}} \right\} \quad (21)$$

となる。

$$\sqrt{m'} = \sqrt{\frac{\sigma_P^2 + \sigma_M^2}{\sigma_P'^2 + \sigma_M^2}} = \sqrt{\frac{1 + \sigma_M^2 / \sigma_P^2}{\kappa^2 + \sigma_M^2 / \sigma_P^2}} \\ \sqrt{m''} = \sqrt{\frac{\sigma_P^2}{\sigma_P'^2 + \sigma_M^2}} = \sqrt{\frac{1}{\kappa^2 + \sigma_M^2 / \sigma_P^2}} \\ \sqrt{n} \times \sqrt{m''} = \sqrt{n''}$$

とおけば

$$P = \Pr \{ u \leq -\delta \sqrt{n''} - 3\sqrt{m'} \} + \Pr \{ u \geq -\delta \sqrt{n''} + 3\sqrt{m'} \} \\ = \Phi(-3\sqrt{m'} - \delta \sqrt{n''}) + \Phi(-3\sqrt{m'} + \delta \sqrt{n''}) \quad (22)$$

となる。

故に、いま n , σ_M^2 / σ_P^2 を指定し、各 κ に対する $\sqrt{m'}$, $\sqrt{m''}$, $\sqrt{n''}$ を求め、 δ を指定すると、(22) よりその場合の検出力 P が求められる。

実用的な $n=4$ と $n=5$ につき、 $\sigma_M^2 / \sigma_P^2 = 0.1, 0.2, 0.3, 0.5, 1.0$, $\delta = 0.5 \sim 6.0$, $\kappa = 0.5 \sim 6.0$ の場合の検出力を計算し、その結果を表—4, 表—5に示す。

表—4. 1 $n = 4, \kappa = 0.5$

$\frac{\sigma_M^2}{\sigma_P^2} \backslash \delta$	0.1	0.2	0.3	0.5	1.0
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001
0.5	0.0001	0.0003	0.0006	0.0010	0.0019
1.0	0.0263	0.0276	0.0277	0.0266	0.0224
1.5	0.4023	0.3348	0.2854	0.2181	0.1332
2.0	0.9255	0.8563	0.7827	0.6466	0.4141
2.5	0.9991	0.9947	0.9834	0.9371	0.7509
3.0	1.0000	1.0000	0.9997	0.9964	0.9420
3.5	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9932
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9996
4.5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

表—4. 2 $n = 4, \kappa = 2$

$\frac{\sigma_M^2}{\sigma_P^2} \backslash \delta$	0.1	0.2	0.3	0.5	1.0
0	0.1202	0.1088	0.0990	0.0833	0.0578
0.5	0.1649	0.1506	0.1381	0.1175	0.0830
1.0	0.2912	0.2701	0.2511	0.2187	0.1606
1.5	0.4724	0.4455	0.4206	0.3762	0.2898
2.0	0.6636	0.6364	0.6102	0.5612	0.4569
2.5	0.8200	0.7985	0.7769	0.7340	0.6326
3.0	0.9206	0.9073	0.8932	0.8636	0.7840
3.5	0.9715	0.9650	0.9578	0.9415	0.8912
4.0	0.9917	0.9893	0.9864	0.9793	0.9536
4.5	0.9981	0.9974	0.9964	0.9940	0.9833
5.0	0.9996	0.9995	0.9992	0.9986	0.9950
5.5	0.9999	0.9999	0.9999	0.9997	0.9987
6.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997

表—4. 3 $n = 4, \kappa = 3$

$\frac{\sigma_M^2}{\sigma_P^2} \backslash \delta$	0.1	0.2	0.3	0.5	1.0
0	0.2969	0.2786	0.2620	0.2332	0.1797
0.5	0.3230	0.3043	0.2873	0.2575	0.2013
1.0	0.3960	0.3764	0.3584	0.3263	0.2633
1.5	0.5015	0.4815	0.4628	0.4286	0.3582
2.0	0.6203	0.6012	0.5828	0.5485	0.4740

$\frac{\sigma_M^2}{\sigma_P^2}$ δ	0.1	0.2	0.3	0.5	1.0
2.5	0.7340	0.7171	0.7006	0.6689	0.5964
3.0	0.8291	0.8156	0.8022	0.7756	0.7114
3.5	0.8997	0.8900	0.8801	0.8600	0.8086
4.0	0.9463	0.9400	0.9335	0.9199	0.8827
4.5	0.9739	0.9702	0.9664	0.9580	0.9338
5.0	0.9885	0.9866	0.9845	0.9799	0.9657
5.5	0.9954	0.9945	0.9935	0.9913	0.9837
6.0	0.9983	0.9980	0.9975	0.9965	0.9929

表—4. 4 $n = 4, \kappa = 4$

$\frac{\sigma_M^2}{\sigma_P^2}$ δ	0.1	0.2	0.3	0.5	1.0
0	0.4329	0.4142	0.3969	0.3657	0.3035
0.5	0.4471	0.4285	0.4112	0.3801	0.3176
1.0	0.4874	0.4692	0.4522	0.4213	0.3583
1.5	0.5482	0.5308	0.5144	0.4843	0.4210
2.0	0.6217	0.6055	0.5901	0.5614	0.4993
2.5	0.6991	0.6846	0.6707	0.6443	0.5854
3.0	0.7728	0.7604	0.7484	0.7252	0.6715
3.5	0.8373	0.8272	0.8173	0.7978	0.7514
4.0	0.8895	0.8817	0.8740	0.8586	0.8204
4.5	0.9289	0.9233	0.9176	0.9060	0.8764
5.0	0.9567	0.9528	0.9489	0.9407	0.9190
5.5	0.9751	0.9725	0.9700	0.9645	0.9495
6.0	0.9864	0.9849	0.9833	0.9799	0.9701

表—4. 5 $n = 4, \kappa = 5$

$\frac{\sigma_M^2}{\sigma_P^2}$ δ	0.1	0.2	0.3	0.5	1.0
0	0.5300	0.5127	0.4965	0.4669	0.4054
0.5	0.5381	0.5210	0.5049	0.4755	0.4144
1.0	0.5617	0.5451	0.5294	0.5007	0.4405
1.5	0.5983	0.5825	0.5676	0.5400	0.4815
2.0	0.6445	0.6299	0.6159	0.5900	0.5340
2.5	0.6963	0.6830	0.6703	0.6465	0.5940
3.0	0.7495	0.7378	0.7265	0.7052	0.6571
3.5	0.8005	0.7905	0.7808	0.7622	0.7194
4.0	0.8467	0.8384	0.8303	0.8146	0.7776

$\frac{\sigma_M^2}{\sigma_P^2}$ δ	0.1	0.2	0.3	0.5	1.5
4.5	0.8864	0.8797	0.8731	0.8603	0.8293
5.0	0.9187	0.9135	0.9084	0.8982	0.8732
5.5	0.9439	0.9400	0.9362	0.9284	0.9089
6.0	0.9627	0.9599	0.9571	0.9514	0.9366

表—4. 6 $n = 4, \kappa = 6$

$\frac{\sigma_M^2}{\sigma_P^2}$ δ	0.1	0.2	0.3	0.5	1.0
0	0.6005	0.5849	0.5702	0.5431	0.4855
0.5	0.6055	0.5901	0.5755	0.5486	0.4914
1.0	0.6202	0.6052	0.5909	0.5647	0.5086
1.5	0.6434	0.6291	0.6155	0.5902	0.5360
2.0	0.6736	0.6602	0.6474	0.6235	0.5718
2.5	0.7087	0.6963	0.6845	0.6624	0.6139
3.0	0.7465	0.7354	0.7247	0.7045	0.6598
3.5	0.7850	0.7751	0.7656	0.7476	0.7071
4.0	0.8222	0.8136	0.8054	0.7897	0.7537
4.5	0.8566	0.8494	0.8424	0.8289	0.7977
5.0	0.8873	0.8814	0.8755	0.8643	0.8377
5.5	0.9137	0.9089	0.9041	0.8949	0.8728
6.0	0.9356	0.9318	0.9280	0.9207	0.9027

表—5. 1 $n = 5, \kappa = 0.5$

$\frac{\sigma_M^2}{\sigma_P^2}$ δ	0.1	0.2	0.3	0.5	1.0
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001
0.5	0.0003	0.0006	0.0010	0.0016	0.0026
1.0	0.0619	0.0587	0.0551	0.0484	0.0364
1.5	0.6372	0.5402	0.4643	0.3558	0.2134
2.0	0.9875	0.9614	0.9219	0.8216	0.5813
2.5	1.0000	0.9997	0.9983	0.9865	0.8860
3.0	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9863
3.5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9993
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

表—5. 2 $n = 5, \kappa = 2$

$\frac{\sigma_M^2/\sigma_P^2}{\delta}$	0.1	0.2	0.3	0.5	1.0
0	0.1202	0.1088	0.0990	0.0833	0.0578
0.5	0.1758	0.1608	0.1477	0.1260	0.0894
1.0	0.3304	0.3077	0.2871	0.2516	0.1866
1.5	0.5415	0.5138	0.4878	0.4405	0.3459
2.0	0.7438	0.7187	0.6940	0.6466	0.5409
2.5	0.8863	0.8696	0.8523	0.8168	0.7266
3.0	0.9607	0.9525	0.9436	0.9237	0.8649
3.5	0.9896	0.9866	0.9832	0.9748	0.9455
4.0	0.9979	0.9971	0.9961	0.9935	0.9823
4.5	0.9997	0.9995	0.9993	0.9987	0.9954
5.0	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9990
5.5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998
6.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

表—5. 3 $n = 5, \kappa = 3$

$\frac{\sigma_M^2/\sigma_P^2}{\delta}$	0.1	0.2	0.3	0.5	1.0
0	0.2969	0.2786	0.2620	0.2332	0.1797
0.5	0.3294	0.3106	0.2935	0.2635	0.2066
1.0	0.4186	0.3989	0.3807	0.3480	0.2831
1.5	0.5430	0.5232	0.5045	0.4699	0.3975
2.0	0.6756	0.6573	0.6397	0.6063	0.5319
2.5	0.7930	0.7780	0.7632	0.7342	0.6659
3.0	0.8817	0.8709	0.8600	0.8379	0.7825
3.5	0.9397	0.9329	0.9258	0.9111	0.8715
4.0	0.9727	0.9690	0.9650	0.9564	0.9315
4.5	0.9891	0.9873	0.9853	0.9809	0.9671
5.0	0.9961	0.9954	0.9945	0.9926	0.9859
5.5	0.9988	0.9985	0.9982	0.9974	0.9946
6.0	0.9997	0.9996	0.9995	0.9992	0.9981

表—5. 4 $n = 5, \kappa = 4$

$\delta \backslash \sigma_M^2 / \sigma_P^2$	0.1	0.2	0.3	0.5	1.0
0	0.4329	0.4142	0.3969	0.3657	0.3035
0.5	0.4505	0.4320	0.4147	0.3836	0.3211
1.0	0.5002	0.4821	0.4652	0.4345	0.3713
1.5	0.5733	0.5562	0.5401	0.5104	0.4474
2.0	0.6583	0.6428	0.6281	0.6003	0.5395
2.5	0.7435	0.7302	0.7173	0.6927	0.6366
3.0	0.8197	0.8089	0.7983	0.7777	0.7290
3.5	0.8814	0.8732	0.8651	0.8490	0.8093
4.0	0.9271	0.9213	0.9155	0.9037	0.8736
4.5	0.9581	0.9543	0.9505	0.9425	0.9212
5.0	0.9776	0.9752	0.9729	0.9678	0.9539
5.5	0.9888	0.9875	0.9861	0.9832	0.9747
6.0	0.9948	0.9941	0.9934	0.9918	0.9870

表—5. 5 $n = 5, \kappa = 5$

$\delta \backslash \sigma_M^2 / \sigma_P^2$	0.1	0.2	0.3	0.5	1.0
0	0.5300	0.5127	0.4965	0.4669	0.4054
0.5	0.5401	0.5230	0.5070	0.4777	0.4166
1.0	0.5692	0.5528	0.5373	0.5088	0.4489
1.5	0.6138	0.5983	0.5837	0.5567	0.4990
2.0	0.6685	0.6545	0.6411	0.6161	0.5617
2.5	0.7278	0.7154	0.7035	0.6811	0.6311
3.0	0.7860	0.7755	0.7653	0.7459	0.7015
3.5	0.8391	0.8305	0.8221	0.8059	0.7679
4.0	0.8843	0.8776	0.8709	0.8579	0.8266
4.5	0.9205	0.9154	0.9104	0.9003	0.8756
5.0	0.9477	0.9441	0.9404	0.9330	0.9144
5.5	0.9672	0.9646	0.9621	0.9569	0.9435
6.0	0.9803	0.9786	0.9770	0.9735	0.9643

表—5. 6 $n = 5, \kappa = 6$

δ \ σ_M^2/σ_P^2	0.1	0.2	0.3	0.5	1.0
0	0.6005	0.5849	0.5702	0.5431	0.4855
0.5	0.6067	0.5914	0.5768	0.5499	0.4928
1.0	0.6250	0.6100	0.5960	0.5699	0.5142
1.5	0.6535	0.6394	0.6260	0.6012	0.5478
2.0	0.6897	0.6767	0.6644	0.6413	0.5910
2.5	0.7309	0.7192	0.7080	0.6870	0.6406
3.0	0.7738	0.7636	0.7537	0.7351	0.6933
3.5	0.8159	0.8071	0.7986	0.7825	0.7457
4.0	0.8548	0.8475	0.8405	0.8269	0.7953
4.5	0.8891	0.8832	0.8775	0.8663	0.8400
5.0	0.9180	0.9133	0.9088	0.8999	0.8786
5.5	0.9412	0.9377	0.9342	0.9274	0.9106
6.0	0.9592	0.9566	0.9541	0.9489	0.9361

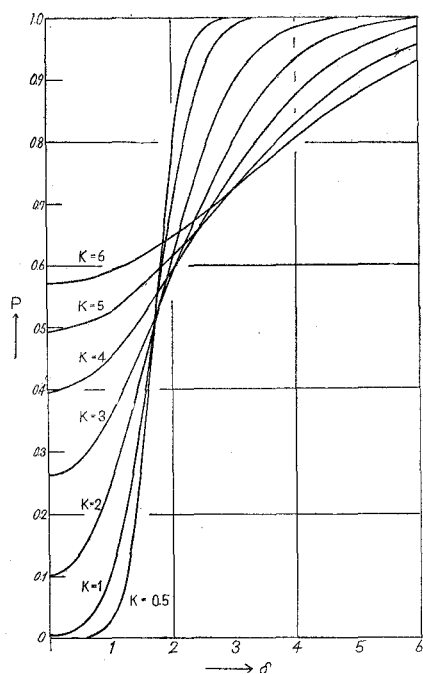


図-6 検出力曲線 (5)
 μ と σ_P が変化した場合
 $n=4$ $\sigma_M^2/\sigma_P^2=0.3$

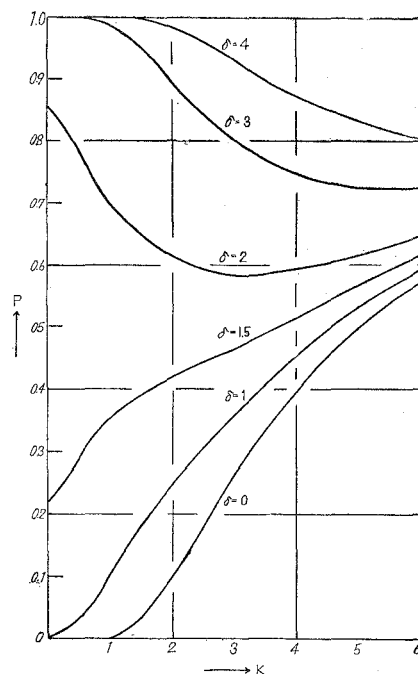


図-7 検出力曲線 (6)
 μ と σ_P が変化した場合
 $n=4$ $\sigma_M^2/\sigma_P^2=0.3$

図-6 に $n = 4$, $\sigma_M^2/\sigma_P^2 = 0.3$, $\kappa = 0.5$ ~ 6 の場合の δ と P との関係, 図-7 に $n = 4$, $\sigma_M^2/\sigma_P^2 = 0.3$, $\delta = 0 \sim 4$ の場合の κ と P との関係, 図-8 に $n = 4$, $\delta = 2$, $\kappa = 0.5 \sim 6$ の場合の σ_M^2/σ_P^2 と P との関係を示す。

また, 式 (22) において, n , σ_M^2/σ_P^2 を指定し P を固定して, 解くとその場合の等検出力線図が得られる。 $n = 4$, $\sigma_M^2/\sigma_P^2 = 0.5$ の場合について計算を行ない, 結果を図示すると図-9 のようになる。図-9 には比較のために, $n = 4$, $\sigma_M^2/\sigma_P^2 = 0$ の場合の $P = 0.01, 0.50, 0.99$ の等検出力線も併記した。

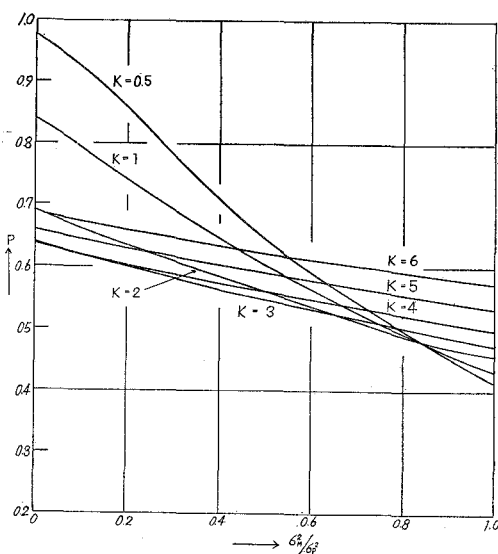


図-8 検出力曲線 (7)
 μ と σ_P が変化した場合
 $n=4$ $\delta=2$

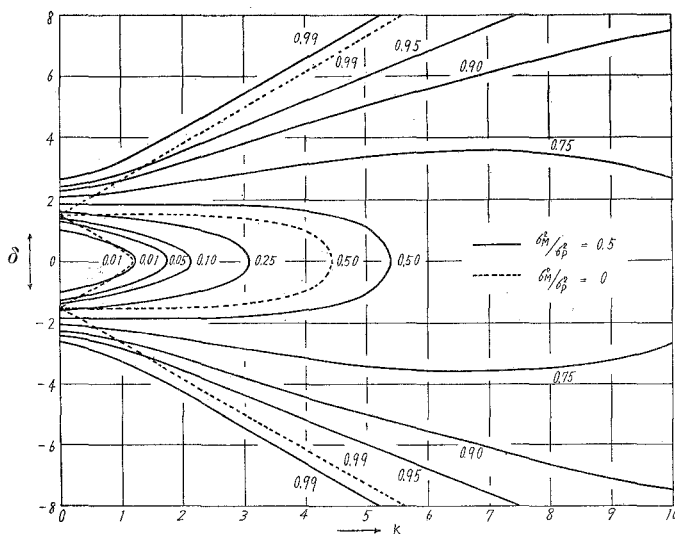


図-9 等検出力線図
 $n=4$ $\sigma_M^2/\sigma_P^2=0.5$

μ と σ_P が同時に変化した場合の \bar{x} 管理図の検出力に対する測定誤差の影響を要約すればつぎのとおりである。

- 1) $\delta = 0$, $\kappa = 1$ のときは σ_M^2/σ_P^2 は検出力に影響しない。
- 2) 3シグマ法では工程の変化が $\kappa < 1$, $\delta\sqrt{n} < 3$ の範囲内で測定誤差が存在すると,

僅かではあるが検出力が増加する場合もある。

3) 3シグマ法で $\sigma_M^2/\sigma_P^2=0.1\sim 1.0$ の範囲では、2) の場合を除き σ_M^2/σ_P^2 が増大すれば検出力は小となる。とくに κ が小さく ($\kappa \leq 1$)、 $\delta\sqrt{n}=3\sim 5$ のとき検出力の減少の程度が大きい。

4) 式 (22) において、 δ が大なるところでは $\delta\sqrt{n''}$ が重大な意義をもち、 κ が増大すると $\sqrt{m''}$ の値が小となるので検出力はかえって小となる。

5) δ が小なるところでは式 (22) の $3\sqrt{m''}$ が重大な意義をもち、 κ が増大すると $\sqrt{m''}$ の値が小となるので検出力が増す。

6) σ_M^2/σ_P^2 が大となって検出力が減少したとき、 n を大にすれば検出力を回復することが可能である。

5. 結 言

工程平均のみが変化した場合、工程標準偏差のみが変化した場合、ならびにこれらがともに変化した場合の \bar{x} 管理図の検出力に対する測定誤差の影響を調べた。測定誤差が無視できない場合には管理図の検出力を考慮して n を定める必要があるが、その根拠は本報の結果から与えられる。

終りに、御懇切な御指導を賜わった東京工業大学資源化学研究所水野滋博士に感謝の意を表す。また本報のとりまとめにあたっては工学土木内吾朗君の協力によるところが多い。記して感謝の意を表わす。

(昭和38年4月30日受理)

文 献

- 1) 伊東静男：管理図法ノート（日科技連，1959）
- 2) Cowden, D.J. : Statistical Methods in Quality Control P.257 (Prentice-Hall, Inc.1957)
- 3) Mizuno, S. : Bulletin of the International Statistical Institute 38, Part 3, 405 (1961)
- 4) 上甲子郎，日本疎安工業協会技術資料，第5集（日本疎安工業協会，1954）
- 5) 熊谷智徳：品質管理，10, 802 (1959)
- 6) 吉本 勇：標準化，12, No.9, 4 (1959)